Théorème d'Artin

Référence :

Recasage : 228 / 229 / 236 / 239 / 253 / 265

Pour démontrer ce résultat on admet quelques propriétés qui seront ou non dans la leçon. On donnera dans l'annexe du développement des éléments de démonstrations de tous ces résultats.

On définit la fonction Γ d'Euler $\forall x > 0\ \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\ dt$ et on admet les résultats suivants :

- Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$
- $\forall x > 0\ \Gamma^{(k)}(x) = \displaystyle\int_0^\infty \ln^k(t)t^{x-1}e^{-t}\ dt$
- $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

(La preuve de ces résultats est facile, on ne peut pas les mettre dans le développement car on dépasserait largement les 15 minutes).

Lemme 1

▶ $\forall x > 0\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

▶ Γ est log-convexe.

Preuve.

▶ Soit $x > 0$, par une intégration par partie : $\Gamma(x+1) = \displaystyle\int_0^\infty t^x e^{-t}\ dt = \lim_{\substack{A\to+\infty\\ \varepsilon\to 0}} \int_\varepsilon^A t^x e^{-t}\ dt$

Or : $\displaystyle\int_\varepsilon^A t^x e^{-t}\ dt = \Big[-t^x e^{-t}\Big]_\varepsilon^A + x\int_\varepsilon^A t^{x-1}e^{-t}\ dt$ et en faisant tendre ε et A on obtient la relation souhaité.

▶ Comme Γ est strictement positive et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $x \longmapsto \ln\circ\Gamma(x)$ est aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On peut donc caractériser la convexité à l'aide de la dérivée seconde. Ainsi on obtient alors : $(\ln\circ\Gamma)''(x) = \dfrac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - \Gamma'(x)^2}{\Gamma^2(x)}$. On va donc étudier le signe du numérateur :

$$\begin{aligned}
\Gamma'(x) &= \int_0^\infty \ln(t)t^{x-1}e^{-t}\ dt = \int_0^\infty \ln(t)t^{\frac{x-1}{2}}e^{-\frac{t}{2}}t^{\frac{x-1}{2}}e^{-\frac{t}{2}}\ dt \\
&\leq \sqrt{\int_0^\infty \ln(t)^2 t^{x-1}e^{-t}\ dt}\sqrt{\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\ dt} \qquad \text{Par l'inégalité de Cauchy Schwarz} \\
&\leq \sqrt{\Gamma''(x)}\sqrt{\Gamma(x)}
\end{aligned}$$

En élevant aux carré on obtient alors que $\Gamma''(x)\Gamma(x) - \Gamma'(x)^2 \geq 0$ ce qui prouve bien que $\ln\circ\Gamma$ est convexe.

■

Théorème 1 (Artin)

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une application log-convexe telle que $\forall x > 0 f(x+1) = xf(x)$ Alors : $f(x) = f(1)\Gamma(x)$

Preuve.

La fonction $\dfrac{f}{\Gamma}$ est 1-périodique, en effet par hypothèse et le lemme précédent on a :

$$\forall x > 0 \quad \left(\frac{f}{\Gamma}\right)(x+1) = \frac{f(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{xf(x)}{x\Gamma(x)} = \frac{f(x)}{\Gamma(x)} = \left(\frac{f}{\Gamma}\right)(x)$$

On peut donc se contenter de démontrer le résultat pour $x \in]0;1]$ car on pourra étendre le résultat par périodicité.

▶ Soit $x \in]0;1]$ on applique l'inégalité des pentes à la fonctions $\ln \circ f$ qui est une fonction convexe par hypothèse. On l'applique pour les points $n, n+1$ ainsi que $n+1, n+1+x$ et enfin $n+1, n+2$ on obtient alors :

$$\ln\big(f(n+1)\big) - \ln\big(f(n)\big) \leq \frac{\ln\big(f(n+1+x)\big) - \ln\big(f(n+1)\big)}{x} \leq \ln\big(f(n+2)\big) - \ln\big(f(n+1)\big)$$

En utilisant le le fait que $f(n+1) = nf(n)$ on obtient :

$$\ln(n) \leq \frac{\ln\left(\frac{f(n+1+x)}{f(n+1)}\right)}{x} \leq \ln(n+1)$$

En multipliant par $x > 0$ et composant par $x \longmapsto \exp(x)$ qui est strictement croissante on a :

$$n^x \leq \frac{f(n+1+x)}{f(n+1)} \leq (n+1)^x$$

Donc :

$$1 \leq \frac{f(n+1+x)}{n^x f(n+1)} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x$$

en vertu du théorème des gendarmes il vient que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1+x)}{n^x f(n+1)} = 1$

De plus comme $f(x+1+n) = (n+x)(n-1+x)\cdots xf(x) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(n-k+x)f(x)$ et $f(n+1) = n!f(1)$ on ecrit alors :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n}(n-k+x)}{n^x n!} = \frac{f(x)}{f(1)}$$

Mais comme Γ vérifie les mêmes hypothèses que f il vient que $\dfrac{\Gamma(1)}{\Gamma(x)} = \dfrac{f(1)}{f(x)} \Longrightarrow f(x) = f(1)\Gamma(x)$ car $\Gamma(1) = 1$

■

Application 1 (Formule de Duplication)

$$\forall x > 0 \; 2^{x-1}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\;\Gamma(x)$$

Preuve.

On pose la fonction $\Phi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par $\Phi(x) = 2^{x-1}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

► Montrons que Φ est log-convexe :

$$\ln\circ\Phi(x) = (x-1)\ln(2) + \ln\left(\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \ln\left(\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)$$

$\ln\circ\Phi$ est donc une somme de fonction convexe donc est convexe. Ainsi Φ est log-convexe.

► Montrons que $\Phi(x+1) = x\Phi(x)$: $\forall x > 0$:

$$\begin{aligned}
\Phi(x+1) &= 2^x\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+2}{2}\right) \\
&= \frac{x}{2}2^x\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \\
&= x2^{x-1}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \\
&= x\Phi(x)
\end{aligned}$$

En vertu du théorème de Borh-Mollerup $\Phi(x) = \Phi(1)\Gamma(x)$ or $\Phi(1) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
Finalement :

$$\boxed{\Phi(x) = \sqrt{\pi}\Gamma(x) \Longleftrightarrow 2^{x-1}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\;\Gamma(x)}$$

■

Application 2 (Une belle intégrale)

$$\int_0^1 \ln\circ\Gamma(x)\;dx = \ln(\sqrt{2\pi})$$

Preuve.

► Montrons déjà que $\ln\circ\Gamma$ est intégrable au voisinage de 0 :

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \Longrightarrow \ln\left(\Gamma(x)\right) = \ln\big(\Gamma(x+1)\big) - \ln(x)$$

Or $\lim\limits_{x\to 0}\ln\big(\Gamma(x+1)\big) = 0$ donc $\ln\big(\Gamma(x)\big) \underset{0}{\sim} -\ln(x)$ qui est une fonction intégrable au voisinage de 0. On va passer au log dans la formule de duplication :

$$(x-1)\ln(2) + \ln\circ\Gamma\left(\frac{x}{2}\right) + \ln\circ\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \ln(\sqrt{\pi}) + \ln\circ\Gamma(x)$$

On intègre entre 0 et 1 cette relation :

$$-\frac{1}{2}\ln(2)+\int_0^1 \ln\circ\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\ dx+\int_0^1 \ln\circ\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)=\ln(\sqrt{\pi})+\int_0^1 \ln\circ\Gamma(x)\ dx$$

en posant les changement de variables $u=\dfrac{x}{2}$ et $u=\dfrac{x+1}{2}$ dans les intégrales du membres de gauche on obtient.

$$-\frac{1}{2}\ln(2)+2\int_0^{\frac{1}{2}} \ln\circ\Gamma(u)\ du+2\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln\circ\Gamma(u)\ du=\ln(\sqrt{\pi})\int_0^1 \ln\circ\Gamma(x)\ dx$$

Et donc :

$$\boxed{\int_0^1 \ln\circ\Gamma(x)\ dx=\frac{1}{2}\ln(2)+\ln(\sqrt{\pi})=\ln(\sqrt{2\pi})}$$

■

Annexe : Comment prouver les résultats admis ?

• Pour montrer que Γ est continue on utilise le théorème de continuité des intégrales à paramètre, on montre que la continuité est sur tout compact avant d'étendre à $\mathbb{R}_+^*$; pour la domination on fait attention au cas ou t est plus petit ou plus grand que 1.

• Pour montrer la dérivabilité c'est le même problème, on montre d'abord qu'elle est $\mathscr{C}^1$ sur tout compacte et puis on enchaine par une récurrence pour montrer qu'on est bien de classe $\mathscr{C}^\infty$. Toujours en distinguant les cas t plus petit ou plus grand que 1.

• Pour calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ on pose le changement de variable $u=\sqrt{x}$ pour se ramener à une gaussienne. Si jamais on veut redémontrer le résultat on calcul l'intégrale au carré, Fubini positif puis changement de variable en coordonnées polaire suffisent pour tomber sur ce qu'on veut.

Question possible du jury ?

• Les résultats admis peuvent être des questions classiques du jury donc à maitriser.

• Y a-t-il un lien entre la notion de convexité et log-convexité ?

Réponse : log-convexe $\Longrightarrow$ convexe mais la réciproque est fausse, il suffit de prendre une fonction affine pour s'en convaincre car le log est concave. Démontrons le fait que log-convexe $\Longrightarrow$ f est convexe. Soit $t\in[0,1]$ comme la fonction $\ln\circ f$ est convexe on a :

$$\ln\big(f(tx+(1-t)y)\big)\leq t\ln(f(x))+(1-t)\ln(f(y))\Longleftrightarrow f(tx+(1-t)y)\leq e^{t\ln(f(x)+(1-t)\ln(y)}$$

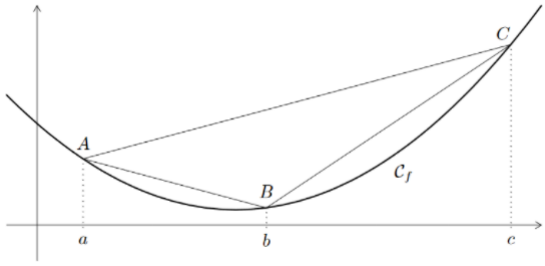
Mais comme la fonction $x\longrightarrow e^x$ est convexe on obtient :

$$f(tx+(1-t)y)\leq te^{\ln(f(x))}+(1-t)e^{\ln(f(y))}=tf(x)+(1-t)f(y)$$

Ce qui montre que f est convexe.

• Hypothèses pour l'inégalité des pentes, comment ça marche ?

Réponse : Commencer par faire un dessin en traçant une fonction convexe avec trois points et regarder les pentes associés :



Si le dessin ne leur suffit pas, il faut dire que si la fonction est $\mathscr{C}^1$ cela vient de du fait que la dérivée est croissante donc les taux d'accroissement augmentent.

• Deuxième méthode pour montrer que Γ est log-convexe juste avec la définition ?

Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ $\lambda \in]0;1[$:

$$\begin{aligned}
\Gamma\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) &= \int_0^\infty t^{\lambda x + (1-\lambda y)-1} e^{-t}\ dt \\
&= \int_0^\infty t^{\lambda(x-1)} t^{\lambda + (1-\lambda)y - 1} e^{-t}\ dt \\
&= \int_0^\infty t^{\lambda(x-1)} t^{(1-\lambda)(y-1)} e^{-t}\ dt \\
&= \int_0^\infty t^{\lambda(x-1)} e^{-\lambda t} t^{(1-\lambda)(y-1)} e^{(1-\lambda)-t}\ dt \\
&= \int_0^\infty \big(t^{x-1}e^{-t}\big)^\lambda \big(t^{y-1}e^{-t}\big)^{1-\lambda}\ dt \\
&\leq \left(\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\right)^\lambda \left(\int_0^\infty t^{y-1}e^{-t}\right)^{1-\lambda} \qquad \text{(Par inégalité de Hölder)} \\
&\leq \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-\lambda}
\end{aligned}$$

Par croissance de la fonction $x \longmapsto \ln(x)$ on en déduit que $\ln\Big(\Gamma\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big)\Big) \leq \lambda \ln\big(\Gamma(x)\big) + (1-\lambda)\ln\big(\Gamma(y)\big)$ ce qui démontre la log-convexité.